ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI VIỆT LONG

BẤT ĐẲNG THỨC MUIRHEAD VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI VIỆT LONG

BẤT ĐẲNG THỨC MUIRHEAD VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

MỞ ĐẦU

Bất đẳng thức là một vấn đề nghiên cứu được hình thành từ khá sớm của toán học sơ cấp nhưng hiện nay vẫn thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả. Đây cũng là một phần kiến thức đẹp đẽ, thú vị trong toán sơ cấp. Do đó các vấn đề về bất đẳng thức luôn cuốn hút được nhiều người nghiên cứu toán sơ cấp và có nhiều bài tập được sử dụng để thi các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Đã có nhiều tác giả trong và ngoài nước có những nghiên cứu về bất đẳng thức và có nhiều chuyên đề hay, thể hiện tính thời sự của vấn đề nghiên cứu.

Được hình thành vào đầu thế kỷ XX, bất đẳng thức Muirhead được xuất hiện trong một công trình nghiên cứu của nhà toán học R. F. Muirhead vào năm 1903 và là tổng quát hóa khá quan trọng của bất đẳng thức $AM - GM$. Nó cho một đánh giá về tổng Symmetric của hai bộ số có quan hệ $\prec$. Có thể nói, bất đẳng thức Muirhead là một công cụ mạnh trong việc giải một số bài toán về bất đẳng thức có độ phức tạp cao thể hiện trong việc đã có nhiều bài tập thi học sinh giỏi, Olympic các nước, khu vực, thế giới - mà việc giải cần dùng đến bất đẳng thức Muirhead. Hơn nữa, bất đẳng thức Muirhead có thể áp dụng cùng với các bất đẳng thức khác để xây dựng những bất đẳng thức mới sâu sắc hơn. Mặc dầu đã có nhiều tác giả quan tâm đến bất đẳng thức Muirhead nhưng việc cải tiến bất đẳng thức này là khá chậm, hơn một thế kỷ sau (năm 2009) kể từ công trình của R. F. Muirhead, hai tác giả J. B. Paris và A. Vencovská mới đưa ra một cải tiến mới về bất đẳng thức này.

Sự lựa chọn đề tài **Bất đẳng thức Muirhead và một số vấn đề liên quan** nhằm giới thiệu lại công trình nghiên cứu của R. F. Muirhead và J. B. Paris và A. Vencovská về đánh giá về tổng Symmetric của hai bộ số thực không âm có quan hệ $\prec$. Ngoài ra luận văn cũng giới thiệu một số ví dụ về áp dụng bất đẳng thức Muirhead trong việc chứng minh các bài tập về bất đẳng thức đã sử dụng trong các kỳ thi học sinh giỏi, Olympic các nước, khu vực, thế giới.

Luận văn được chia thành hai chương. Chương 1 nhằm giới thiệu các kiến thức lý thuyết về bất đẳng thức Muirhead và một mở rộng của bất đẳng thức này. Trong Chương 2 chúng tôi giới thiệu các ví dụ về các bài toán sử dụng đến bất đẳng thức Muirhead như là một áp dụng của định lý Muirhead.

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Qua đây tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán, Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo nhà trường và các Quý Thầy Cô giảng dạy lớp Thạc sĩ khóa 8 (6/2014- 6/2016) trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu, đã trang bị kiến thức cơ bản và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới PGS. TS. Hà Trần Phương, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn một cách hoàn chỉnh.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập của mình.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2016

Người viết luận văn

Bùi Việt Long

Chương 1

Bất đẳng thức Muirhead

1.1. Bất đẳng thức Muirhead cho trường hợp bộ hai và ba số

1.1.1. Một số khái niệm

Định nghĩa 1.1. ([**6**]) Cho một bộ n số thực không âm $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và một bộ các số thực dương $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ta định nghĩa

i) Tổng Cyclic (Viết tắt: *cyc*) của $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ là đại lượng

$$\sum_{cyc} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} + x_2^{a_1} x_3^{a_2} \dots x_1^{a_n} + \dots + x_n^{a_1} x_1^{a_2} \dots x_{n-1}^{a_n}.$$

ii) Tổng Symmetric (Viết tắt: *sym*) của $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ là đại lượng

$$T(a) = T(x;a) = \sum_{sym} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = \sum_{\sigma \in S_{(n)}} x_{\sigma(1)}^{a_1} x_{\sigma(2)}^{a_2} \dots x_{\sigma(n)}^{a_n},$$

trong đó tổng *sym* được lấy trên tất cả các hoán vị $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ của $(1, 2, \dots, n)$, $S_{(n)}$ là tập hợp tất cả các hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$.

iii) Trung bình Symmetric của $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ là đại lượng

$$[x;a] = \frac{1}{n!} T(x;a).$$

Ta có thể sử dụng kí hiệu ngắn gọn $[a]$ thay cho kí hiệu $[x;a]$, $T(a)$ thay cho $T(x;a)$ khi phần tử x đã được xác định rõ.

Ví dụ 1.1. ([**2**])

$$\sum_{cyc} ab^2c^3 = ab^2c^3 + bc^2a^3 + ca^2b^3;$$
$$\sum_{sym} abc = 6abc.$$

Ví dụ 1.2. ([**4**]) Với $a = (1, 3, 2)$ và $x = (x_1, x_2, x_3)$ thì

$$T(x; a) = x_1x_2^3x_3^2 + x_1x_3^3x_2^2 + x_2x_1^3x_3^2 + x_2x_3^3x_1^2 + x_3x_1^3x_2^2 + x_3x_2^3x_1^2.$$

Và

$$[x; a] = \frac{1}{6}(x_1x_2^3x_3^2 + x_1x_2^2x_3^3 + x_2x_1^3x_3^2 + x_2x_3^3x_1^2 + x_3x_1^3x_2^2 + x_3x_2^3x_1^2).$$

Ví dụ 1.3. ([**6**])

$$[(1, 0, 0, ..., 0); (x_1, \ldots, x_n)] = \frac{(n-1)!}{n!}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

là trung bình cộng của các số $x_1, \ldots, x_n$.

$$\left[(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; ... \frac{1}{n}); (x_1, \ldots, x_n)\right] = \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$

là trung bình nhân của các số $x_1, \ldots, x_n$.

Mệnh đề 1.1. ([**6**])

1. Nếu $x_1x_2...x_n = 1$ *thì*

$$[a_1, a_2, ..., a_n] = [(a_1 - r), (a_2 - r), ..., (a_n - r)]$$

đúng với mọi $r > 0$ *sao cho các* $a_i - r \geqslant 0$.

2. Nếu $x_1x_2...x_n \geqslant 1$ *thì*

$$[a_1, a_2, ..., a_n] \geqslant [(a_1 - r), (a_2 - r), ..., (a_n - r)]$$

đúng với mọi $r > 0$ *sao cho các* $a_i - r \geqslant 0$.

3. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, với hai bộ số thực không âm a và b ta có

$$\frac{[a] + [b]}{2} \geqslant \left[\frac{a+b}{2}\right].$$

Nhận xét 1.1. Cho bộ các số thực không âm $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và một bộ các số thực dương $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nếu $b = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)})$, trong đó $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ là một hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$ thì ta luôn có

$$T(x; a) = T(x; b), \quad [x; a] = [x; b].$$

Tiếp theo ta giới thiệu một số khái niệm cơ bản về so sánh các bộ n số. Cho bộ n số thực không âm $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Dễ thấy rằng ta luôn có thể sắp xếp lại trật tự các phần tử trong a để sao cho

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n.$$

Do đó trong luận văn này, không mất tính tổng quát ta luôn có thể giả thiết $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n$ khi nói đến bộ n số (a). Ta xem xét khái niệm về quan hệ $\prec$ của hai bộ n số thông qua định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.2. ([**6**]) Cho hai bộ n số thực không âm $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Ta nói bộ b trội hơn bộ a, kí hiệu là $a \prec b$ hay $b \succ a$ nếu các điều kiện sau thỏa mãn (sau khi sắp xếp lại trật tự các phần tử trong a, b nếu cần thiết):

1) $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n$; $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_n$;

2) $a_1 + a_2 + \dots + a_m \leqslant b_1 + b_2 + \dots + b_m$ với mọi $m : 1 \leqslant m \leqslant n - 1$;

3) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Ví dụ 1.4. ([**4**])

$(2, 1, 0) \prec (3, 0, 0); (0, 2, 1) \prec (0, 0, 3)$,

$(4, 0, 0, 0) \not\prec (2, 0, 2)$ vì số phần tử ở hai bộ khác nhau,

$(5, 0, -1) \not\prec (2, 2, 0)$ vì có phần tử âm ở một bộ,

$(2, 1, 1, 1) \not\prec (1, 1, 1, 1)$vì $2 + 1 + 1 + 1 \neq 1 + 1 + 1 + 1$,

$(4, 1, 1, 1) \not\prec (3, 3, 1, 0)$vì $4 + 1 \ngeqslant 3 + 3$.

Ví dụ 1.5. ([**6**])

$$(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n}) \prec (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n}).$$

1.1.2. Định lý Muirhead bộ hai và ba số

Định lý 1.2. (**Định lý Muirhead bộ hai số**, [**2**]) *Cho các số thực dương a_1, a_2, b_1, b_2 thỏa mãn:*

$$\begin{cases} a_1 \geqslant a_2; b_1 \geqslant b_2; \\ a_1 \geqslant b_1; \\ a_1 + a_2 = b_1 + b_2. \end{cases}$$

Cho x, y là các số thực dương, khi đó

$$\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} \geqslant \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ hoặc $x = y$.

Định lý 1.3. (**Định lý Muirhead cho bộ ba số**, [**2**]) *Cho hai bộ ba số thực dương $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ thỏa mãn:*

$$\begin{cases} a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3; b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3; \\ a_1 \geqslant b_1; a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2; \\ a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3. \end{cases}$$

Cho x, y, z là các số thực dương, khi đó

$$\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geqslant \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $a_i = b_i; i = 1, 2, 3$ hoặc $x = y = z$.

Chứng minh. Để chứng minh định lý ta cần đến một bổ đề sau:

Bổ đề 1.4. ([**1**]) *Cho các số thực không âm a_1, a_2, b_1, b_2, thỏa mãn: $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$; và $\max\{a_1; a_2\} \geqslant \max\{b_1; b_2\}$. Khi đó với các số thực dương x, y, ta có:*

$$x^{a_1} y^{a_2} + x^{a_2} y^{a_1} \geqslant x^{b_1} y^{b_2} + x^{b_2} y^{b_1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = b_1; a_2 = b_2$ hoặc $x = y$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$a_1 \geqslant a_2, a_1 \geqslant b_1, b_1 \geqslant b_2.$$

Do $a_1+a_2=b_1+b_2$ nên ta có:

$$\begin{aligned}
&x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}-x^{b_1}y^{b_2}-x^{b_2}y^{b_1}\\
&\qquad\qquad\qquad=x^{a_2}y^{a_2}(x^{a_1-a_2}+y^{a_1-a_2}-x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2}-x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2})\\
&\qquad\qquad\qquad=x^{a_2}y^{a_2}(x^{b_1-a_2}+y^{b_1-a_2})(x^{b_2-a_2}-y^{b_2-a_2})\\
&\qquad\qquad\qquad=\frac{1}{x^{a_2}y^{a_2}}(x^{b_1}+y^{b_1})(x^{b_2}-y^{b_2})\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Ta tiếp tục chứng minh định lý. Ta xét hai trường hợp sau:

i) Trường hợp 1. Nếu $b_1\geqslant a_2$, điều này kéo theo $a_1\geqslant a_1+a_2-b_1$ và từ $a_1\geqslant b_1$ ta có

$$a_1\geqslant \max\{a_1+a_2-b_1,b_1\}$$

Kéo theo

$$\max\{a_1,a_2\}=a_1\geqslant \max\{a_1+a_2-b_1,b_1\}\ .$$

Từ

$$a_1+a_2-b_1\geqslant b_1+a_3-b_1=a_3$$

và

$$a_1+a_2-b_1\geqslant b_2\geqslant b_3$$

ta có

$$\max\{a_1+a_2-b_1,a_3\}\geqslant \max\{b_2,b_3\}.$$

Áp dụng Bổ đề 1.4 hai lần ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{sym}x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}&=\sum_{cyc}z^{a_3}(x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1})\\
&\geqslant\sum_{cyc}z^{a_3}(x^{a_1+a_2-b_1}y^{b_1}+x^{b_1}y^{a_1+a_2-b_1})\\
&=\sum_{cyc}x^{b_1}(y^{a_1+a_2-b_1}z^{a_3}+y^{a_3}z^{a_1+a_2-b_1})\\
&\geqslant\sum_{cyc}x^{b_1}(y^{b_2}z^{b_3}+y^{b_3}z^{b_2})\\
&=\sum_{sym}x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.
\end{aligned}$$